نشریه ماشین‌های کشاورزی
جلد ۹، شماره ۱، نیمسال اول ۱۳۹۸، ص ۱۲۲-۱۱۳

Journal of Agricultural Machinery
Vol. 9, No. 1, Spring - Summer 2019, p. 113-122

حل عددی فرآیند انتقال جرم طی خشک کردن برش‌های سیب با استفاده از روش شبه‌طیفی

آتنا پاسبان[1]- محبت محبی[2]*- حسن صدرنیا[3]- سید احمد شهیدی[4]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۱/۱۵
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۵/۱۷

چکیده

یکی از جنبه‌های مهم فناوری خشک‌کردن به‌خصوص در فرآیندهای صنعتی، مدل‌سازی و شبیه‌سازی فرآیند خشک‌کردن می‌باشد. در این پژوهش با استفاده از روش عددی شبه‌طیفی معادلات انتقال جرم مربوط به فرآیند خشک کردن سیب حل گردید. جهت بررسی صحت و دقت مدل ارائه شده نتایج حاصل از حل عددی مدل با نتایج آزمایشگاهی مورد مقایسه و ارزیابی قرار گرفت. جهت تأیید بیشتر دقت روش شبه‌طیفی، مثال عددی دارای جواب دقیق حل گردیده و مقدار خطا محاسبه شد. نتایج حاصل از مقایسه داده‌های مدل با نتایج گزارش شده توسط سایر محققین دارای ضریب همبستگی بالاتر از ۹۹۷/ و ریشه میانگین مربعات خطا کمتر از ۰/۱۵۶۱ می‌باشد که بیانگر دقت بالای روش عددی شبه‌طیفی ارائه شده برای حل معادله انتقال جرم خشک شدن سیب می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: حل عددی، خشک کردن سیب، روش شبه‌طیفی، مدل‌سازی

مقدمه

یکی از جنبه‌های مهم فناوری خشک‌کردن به‌خصوص در فرآیندهای صنعتی، مدل‌سازی ریاضی فرآیند خشک‌کردن می‌باشد. مدل‌سازی دانشی است که به درک بهتر پدیده‌های گوناگون به ما کمک می‌کند. مدل‌سازی به مفهوم گردآوری مفاهیم مختلف در ارتباط با یک پدیده و تبدیل آن‌ها به فرمول‌های ریاضی می‌باشد که با اجرای روش‌های عددی و تحلیلی در برنامه‌های رایانه‌ای می‌توان برای تحلیل کمی و در نهایت پیشگویی استفاده کرد. با توجه به هزینه‌های بسیار زیاد فعالیت‌های آزمایشگاهی و انرژی مصرفی بالای فرآیند خشک کردن (Sadrnia *et al.*, 2015)، شبیه‌سازی پدیده‌ها روشی است که هزینه و زمان کمتری نسبت به مطالعات تجربی دارد (Tavakoli pour, 2002).

خشک‌کردن توسط هوای داغ (خشک‌کردن همرفتی)، از رایج‌ترین روش‌های خشک‌کردن ماده غذایی است که در آن ماده غذایی تازه در تماس با هوایی که قبلاً حرارت داده شده قرار می‌گیرد. طی فرآیند خشک‌کردن مواد غذایی انتقال رطوبت، غالباً به‌عنوان پارامتر کنترل‌کننده خشک کردن در نظر گرفته می‌شود و به‌طور عمده از طریق فرآیند نفوذ مولکولی صورت می‌گیرد که به‌خوبی توسط قانون دوم فیک بیان می‌شود (Bruce and Giner, 1993).

هدف از مدل‌سازی و شبیه‌سازی فرآیند خشک‌کردن این است که بتوان مناسب‌ترین روش خشک‌کردن و همچنین بهترین شرایط عملیاتی را برای خشک‌کردن یک ماده غذایی انتخاب کرد. یکی از شاخه‌های اصلی مدل‌سازی ریاضی، استفاده از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دارای شرایط مرزی و شرط اولیه می‌باشد. روش‌های عددی یکی از اصلی‌ترین ابزارها برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشند. از معروف‌ترین روش‌های عددی به‌کار گرفته شده جهت حل معادلات مربوط به فرآیند انتقال جرم طی خشک کردن می‌توان به روش تفاضلات متناهی[5] (Hussain and Dincer, 2003; Zare *et al.*, 2006; Sabarez *et al.*, 2014) روش المان متناهی[6] (Aversa *et al.*, 2007; Janjai *et al.*, 2008; Seyedabadi *et al.*, 2017) و روش حجم محدود[7] (Villa

۱- دانش‌آموخته دکتری، گروه علوم و صنایع غذایی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران
۲- استاد، گروه علوم و صنایع غذایی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران
۳- دانشیار، گروه مکانیک بیوسیستم، دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران
۴- دانشیار، گروه علوم و صنایع غذایی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد آیت الله آملی، آمل، ایران
(* - نویسنده مسئول: Email: m-mohebbi@um.ac.ir)
DOI: 10.22067/jam.v9i1.63511

5- Finite Difference Method
6- Finite Element Method
7- Finite Volume Method

(corrales *et al*., 2010; Lemus mondaca *et al*., 2013) اشـاره کرد.

در بین روش‌های عددی، روش‌های طیفی[1] از جملـه شـیوه‌هـای عددی شناخته شده و قدرتمند برای حل عددی معـادلات دیفرانسـیل با مشتقات جزئی می‌باشد، که کاربرد آن حدوداً به اوایـل دهـه ۱۹۷۰ میلادی برمی‌گردد. برای حل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به‌صورت عددی، اولاً به شرط هموار بودن جـواب مسـئله و ثانیـاً بـه شرط اینکه دامنه محاسباتی ساده باشد، معمولاً روش طیفـی بهتـرین روش می‌باشـد (Tohidi and Kilicman, 2014; Tohidi, 2015). روش‌های طیفی به جهت ارائه جواب‌هـای دقیـق از اهمیـت ویـژه‌ای برخوردار هستند. این دقت بالا که در روش‌های تفاضلات متنـاهی بـا تعداد نقاط شبکه زیاد به‌سـختی بـه‌دسـت مـی‌آیـد، در ایـن روش‌هـا به‌راحتی با تعداد نقاط بسیار اندکی قابل حصول است. کـاهش نمـایی خطا با افزایش تعـداد نقـاط چنـین ویژگـی منحصـر بـه‌فـردی را بـه روش‌های طیفی می‌بخشد.

کاربرد روش‌های طیفی جهت مدل‌سـازی و شـبیه‌سـازی در سـه دهه گذشته افزایش یافته و به‌طور گسترده‌ای در دینامیک محاسـباتی سیالات (Canuto *et al*., 1998)، مکانیک کوانتـومی (Graham *et al*., 2009)، مغناطیس (Shan *et al*., 1991)، کنترل بهینه (Tohidi and Saberi Nik, 2015; Tohidi and Samadi, 2013)، و معـادلات دیفرانسـیل تـأخیری (Bhrawy *et al*., 2013) اجـرا شـده است. همچنین گزارش‌های متعددی در بررسی فرآیند انتقـال حـرارت تابشی با استفاده از روش‌های طیفی نیز ارائه شده است (Kuo *et al*., 1999, Li *et al*., 2009; Sun and Li, 2012; Zhou and Li, 2017).

با توجه به دقت و کارایی بالای روش‌هـای طیفـی تـاکنون هـیچ مطالعه‌ای مبنی بر استفاده از روش‌های طیفی در فرآینـدهای غـذایی نظیر فرآیند انتقال جرم صورت نگرفته است. از ایـن رو هـدف از ایـن پژوهش، مطالعه دقیق فرآیند انتقال جرم طـی فرآینـد خشـک‌کـردن سیب با استفاده از روش شبه‌طیفی (یک دسـته از روش‌هـای طیفـی) است. جهت تأیید مدل ارائه شده، نتایج حاصـل از حـل عـددی مـدل ارائه شده با استفاده از نتایج به‌دست آمده از خشک کردن سیب توسط Kaya و همکاران (۲۰۰۷) و Zarein و همکـاران (۲۰۱۳) مقایسـه و ارزیابی خواهد شد. همچنین جهت تأیید بیشتر روش ارائه شـده، یـک مثال عددی دارای جواب دقیق توسط روش عددی ذکـر شـده حـل و مقدار خطا محاسبه می‌شود.

مواد و روش‌ها

مدل‌سازی فرآیند

در این پژوهش، مدل‌سازی فرآیند انتقال جرم طی خشـک‌کـردن برش‌های سیب، با استفاده از معادله‌های حاکم بر ایـن پدیـده (قـانون دوم فیک) ارائه می‌گردد. مدل توسعه داده شده بـر فرضـیاتی اسـتوار است که عبارتند از:

از تغییرات دمای نمونه در طی فرآیند خشـک کـردن صـرف‌نظر می‌شود. (Janjai *et al*., 2008).

انتقال جرم در یک بعد صورت می‌گیرد.

از هرگونه چروکیدگی و تغییر شکل در نمونه صرف‌نظر می‌شود.

حرکت رطوبت درون جسم تنهـا از طریـق پدیـده نفـوذ صـورت می‌گیرد.

با در نظر گرفتن فرضیات ذکر شـده معـادلات حـاکم بـر فرآینـد انتقال جرم به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial C}{\partial t}=D_{eff}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right) \qquad (۱)$$

با شرط ابتدایی:

$$C(x,0)=C_0 \qquad (۲)$$

و شرایط مرزی:

$$\left.\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\right|_{x=a_x}=0, \qquad \left.-D_{eff}\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\right|_{x=b_x}=h_m\left(C(b_x,t)-C_{air}\right) \qquad (۳)$$

در روابط بـالا، C (kg water/kg dry mass) محتـوای رطوبـت نمونه، D_{eff} (m^2/s) ضریب نفوذ موثر رطوبت، C_{air} (kg water/kg Dry air) مقـدار رطوبـت موجـود در هـوای خشـک‌کـن، h_m (m/s) ضریب انتقال جرم همرفت در سطح نمونه و x,t به‌ترتیب متغیر زمان (مدت زمان خشک کردن) و متغیر مکان (نصف ضـخامت نمونه) می‌باشند.

روش شبه‌طیفی

در این پژوهش از روش عددی شبه‌طیفی برای شبیه‌سازی معادله انتقال جرم بهره گرفتیم. همـانطور کـه مـی‌دانـیم ایـده کلـی بیشـتر روش‌های حل معادلات دیفرانسیل بـا مشـتقات جزئـی بـا اسـتفاده از روش‌های عددی بدین صورت است که ابتـدا دامنـه پیوسـته مسـأله، گسسته‌سازی می‌شود و سپس تابع مجهول و مشـتقات آن بـه‌وسـیله روش عددی مورد نظر تقریب زده می‌شـود (لازم بـه‌ذکـر اسـت کـه تفاوت بین روش‌های عددی مختلف از تفاوتشان در نوع تقریـب تـابع مجهول یا مشتقات آن حاصل می‌شود). در انتها ترکیب گسسته‌سـازی دامنـه و تقریـب تـابع مجهـول و مشـتقاتش، باعـث تبـدیل معادلـه دیفرانسیل مورد نظر به یک دستگاه معادلات جبری می‌شـود، کـه بـا حل این دستگاه، یک جـواب عـددی بـرای معادلـه دیفرانسـیل پیـدا می‌شود. معمولاً در روش‌های طیفی تابع مجهول $u(x)$ مورد نظر بر حسب یک بسط متناهی از توابع هموار با ضرائب مجهـول بـه شـکل زیر تقریب زده می‌شود:

$$u(x)\approx u_n(x)=\sum_{k=0}^{n_x}a_k\,\emptyset_k(x), \qquad (۴)$$

1- Spectral methods

$\emptyset_k(x)$ تابع پایه و a_k ضرائب بسط هستند که مجهول‌اند و بعد انتخاب روش حل، از حل مسئله جبری به‌دست می‌آیند. بر حسب انتخاب نوع توابع پایه و روش‌های تعیین ضرایب بسط، روش‌های طیفی از یکدیگر متمایز می‌شوند. به‌طور کلی سه روش اصلی برای تعیین ضرایب بسط عبارتند از روش‌های گالرکین[1]، تائو[2] و روش هم‌مکانی[3] (یا شبه‌طیفی).

در این مطالعه روش طیفی هم‌مکانی (یا روش‌های شبه‌طیفی) با در نظر گرفتن چندجمله‌ایی‌های چبی شف به‌عنوان توابع پایه جهت حل عددی معادله انتقال جرم در یک بعد به‌کار گرفته شد. روش‌های شبه‌طیفی، یکی ازشناخته‌شده‌ترین روش طیفی می‌باشند که به‌دلیل اجرای آسان و قابلیت کاربرد برای حل مسائل چندبعدی مورد توجه قرار گرفته‌اند. در روش شبه‌طیفی مشابه با روش تفاضلات متناهی، برای به‌دست آوردن یک تقریب عددی از جواب معادله دیفرانسیل از نقاط گسسته‌سازی مناسب استفاده می‌شود که نقاط هم‌مکانی نامیده می‌شوند که می‌توان با درون‌یابی چندجمله‌ای از طریق گره‌های مناسب انجام داد. با این تفاوت که این روش دارای صحت و دقت بالاتری از روش تفاضلات متناهی می‌باشند (Trefethen, 2000; Costa, 2004).

توسعه مدل شبیه‌سازی

جهت بررسی صحت و دقت روش عددی ارائه شده، نتایج گزارش شده در ارتباط با سینتیک خشک کردن لایه‌های نازک سیب با ضخامت ۴ میلی‌متر توسط Kaya و همکاران در سال ۲۰۰۷ و برش‌های استوانه‌ای شکل سیب با قطر ۶۰ و ضخامت ۳ میلی‌متر توسط Zarein و همکاران (۲۰۱۳) مورد استفاده قرار گرفت. لازم به ذکر است ثابت‌های مورد نیاز برای مدل (ضریب نفوذ رطوبت، ضریب انتقال جرم جابه‌جایی در سطح و مقدار رطوبت هوای داغ خشک‌کن) توسط روش‌های زیر محاسبه و در انتها نتایج حاصل از مدل با نتایج گزارش شده مورد مقایسه قرار گرفتند (جدول ۱).

تعیین ضریب انتقال جرم همرفت در سطح

ضریب انتقال جرم همرفت در سطح نمونه با استفاده از رابطه ارائه شده توسط Paitil (۱۹۸۸) و Janjai و همکاران (۲۰۰۸) تعیین گردید:

$$h_m = \frac{D_{air}}{L}\left(2 + 0/522\, Re^{0.5} Sc^{0.33}\right) \qquad (۵)$$

که در آن D_{air} ضریب نفوذ بخار آب در هوا ($m^2\, s^{-1}$)، L طول نمونه (m)، Re و Sc به‌ترتیب اعداد بدون بعد رینولدز و اشمیت می‌باشند که در ادامه نشان داده شده است.

$$Re = \frac{\rho_{air} u L}{\mu_{air}} \qquad (۶)$$

$$Sc = \frac{\mu_{air}}{\rho_{air} D_{air}} \qquad (۷)$$

در روابط بالا، ρ_{air} (kg/m^3) چگالی، μ_{air} (kg/ms) ویسکوزیته و u (m/s) سرعت جریان هوای خشک‌کن در دمای خشک کردن مورد بررسی می‌باشد.

تعیین ضریب نفوذ مؤثر رطوبت

ضریب نفوذ موثر رطوبت توسط حل تحلیلی ارائه شده توسط Crank (۱۹۷۵) از قانون دوم فیک تعیین گردید (Doymaz, 2007):

$$MR = \frac{8}{\pi} exp\left[-\frac{\pi^2 D_{eff} t}{4x^2}\right] \qquad (۸)$$

مقدار رطوبت موجود در هوای خشک‌کن بر حسب (kg water kg Dry air^{-1}) از روابط ارائه شده توسط (Ashrae, 2009) محاسبه شد:

$$C_{air} = 2.1667 \times \left({RH}/{100}\right) \times \left[\frac{P_{vs} T_{air}}{T_{air} + 273.15}\right] \times (1/\rho_{air}) \qquad (۹)$$

در رابطه ذکر شده، RH درصد رطوبت نسبی هوای خشک‌کن، T_{air} دمای هوای خشک‌کن بر حسب درجه سانتی‌گراد و P_{vs} فشار جزئی بخار آب اشباع هوای خشک کن بر حسب (kPa) می‌باشد که از طریق رابطه (۱۰) به‌دست می‌آید:

$$P_{vs} = \exp[53.33 - \left(\frac{6834.72}{T_{air}}\right) - 5.169 \log T_{air}] \qquad (۱۰)$$

ارزیابی مدل شبیه‌سازی

جهت ارزیابی مدل، دو معیار R^2 و RMSE از مقایسه داده‌های تئوریک حاصل از روش عددی با نتایج آزمایشگاهی محاسبه شد. ضریب همبستگی بالا و ریشه میانگین مربعات خطا کم بیانگر اعتبار روش شبه‌طیفی در شبیه‌سازی مدل انتقال جرم ارائه شده می‌باشد.

کدنویسی در نرم‌افزار Matlab 2011a انجام شد. ضرایب و ثابت‌های مورد نیاز جهت مدل‌سازی و شبیه‌سازی فرآیند خشک کردن سیب در جدول ۱ ارائه شده است.

حل دقیق

از روش‌های بررسی دقت روش عددی، حل عددی معادله مشتقات جزئی دارای جواب دقیق با استفاده از روش عددی مورد نظر می‌باشد. که با مقایسه جواب به‌دست آمده توسط روش عددی و جواب دقیق معادله می‌توان مقدار خطا و دقت روش عددی مورد نظر را برآورد نمود. در این بخش یک مثال عددی دارای جواب دقیق (معادله با مشتقات جزئی مشابه معادله انتقال جرم) توسط روش شبه‌طیفی حل شده و نتایج حاصل از مدل با جواب دقیق معادله مورد

1- Galerkin
2- Tau
3- Collocation

مقایسه قرار گرفته و خطای روش محاسبه گردید.

جدول ۱- خصوصیات سیب و شرایط خشک کردن جهت شبیه‌سازی

Table 1- The properties of apple and physical conditions of drying for simulation

	Zarein *et al.* (2013)	**Kaya *et al.* (2007)**
ضریب نفوذ رطوبت Effective moisture diffusivity ($m^2 s^{-1}$)	5.476×10^{-10}	1.46×10^{-10}
ضریب انتقال جرم جابه‌جایی در سطح Convective mass transfer coefficient ($m s^{-1}$)	0.01342	0.002756
محتوای رطوبت هوای خشک کردن Moisture content of drying air (kg water kg Dry air^{-1})	0.06942	0.03844
محتوای رطوبت اولیه نمونه‌های سیب Initial moisture content of apple slices (kg water kg Dry mass^{-1})	6.249	4.3

مثال عددی همراه با شرایط مرزی و شرط ابتدایی و جواب دقیق در زیر آورده شده است. مقادیر ثابت‌های D، h_m و C_{air} در مثال مورد نظر به‌ترتیب یک، صفر و صفر می‌باشند.

$$\frac{\partial C}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)$$

با شرط ابتدایی:

$$C(x,0)=Cos\pi x$$

و شرایط مرزی:

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,$$

$$-D\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=1}=h_m\ (C(1,t)-C_{air})$$

و جواب دقیق:

$$C(x,t)=Cos\pi x e^{-\pi^2 t}$$

نتایج و بحث

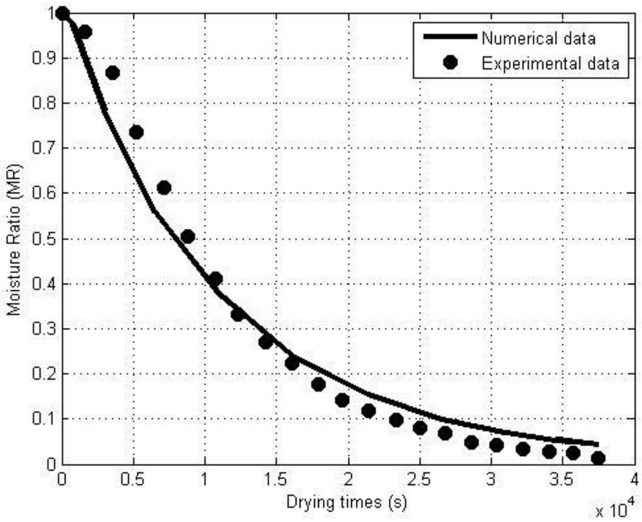
فرآیند انتقال رطوبت درون ماده غذایی طی فرآیند خشک کردن غالباً در طی دوره سرعت نزولی خشک کردن اتفاق می‌افتد که توسط قانون نفوذ فیک توصیف می‌شود. در شکل ۱ و ۲ مقایسه بین داده‌های پیش‌بینی شده توسط مدل با داده‌های آزمایشگاهی گزارش شده توسط Kaya و همکاران در سال ۲۰۰۷ و Zarein و همکاران (۲۰۱۳) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود همبستگی خوبی بین داده‌های آزمایشگاهی و داده‌های پیش‌بینی شده توسط مدل وجود دارد که بیانگر این است که مدل انتقال جرم توسعه داده شده به‌خوبی توانسته است تغییرات رطوبت نمونه را در طی زمان خشک کردن پیش‌بینی نماید. مقدار ضریب همبستگی و ریشه میانگین مربعات خطا حاصل از مقایسه بین داده‌های حاصل از مدل و داده‌های گزارش شده توسط Zarein و همکاران (۲۰۱۳) و Kaya و همکاران (۲۰۰۷) در جدول ۲ نشان داده شده است که بیانگر دقت بالای روش شبه‌طیفی در شبیه‌سازی معادله انتقال جرم در یک بعد می‌باشد.

همانطور که در شکل ۱ و ۲ مشاهده می‌شود در ابتدای زمان خشک کردن مقدار نسبت رطوبت به‌طور قابل توجهی کاهش می‌یابد که این امر ناشی از تبخیر سریع آب موجود در سطح نمونه و سرعت بالای انتقال آب از درون نمونه به سطح طی فرآیند نفوذ مولکولی می‌باشد. این در حالی است که با گذشت زمان و کاهش آب سطحی نمونه و تغییرات ایجاد شده در نمونه طی خشک کردن، سرعت انتقال آب از مرکز نمونه به سطح کاهش و در نتیجه سرعت تبخیر و سرعت کاهش محتوای رطوبت در طی زمان کاهش می‌یابد (Ateeque *et al.*, 2014; Tzempelikos *et al.*, 2015).

جدول ۲- آنالیز آماری مدل شبیه‌سازی شده

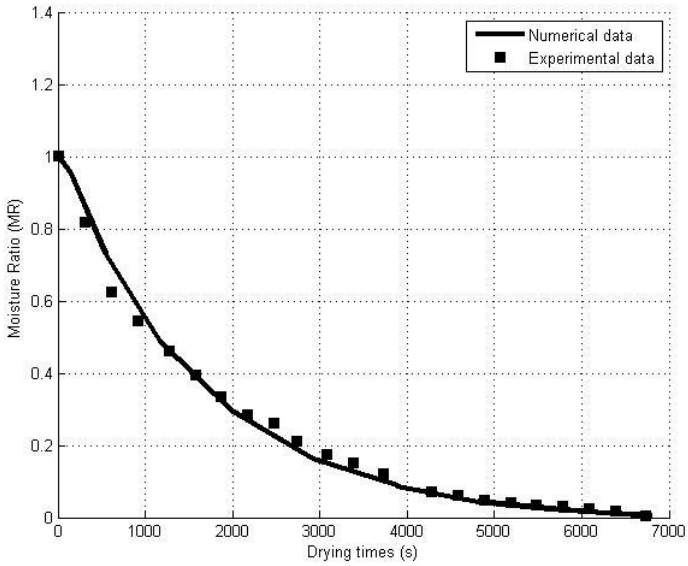
Table 2– Statistical analyses of simulated model

	Zarein *et al* (2013)	**Kaya *et al* (2007)**
R^2	0.9996	0.997
RMSE	0.07295	0.1561



شکل ۱– مقایسه داده‌های به‌دست آمده توسط روش عددی شبه‌طیفی با داده‌های آزمایشگاهی کایا و همکاران (۲۰۰۷)

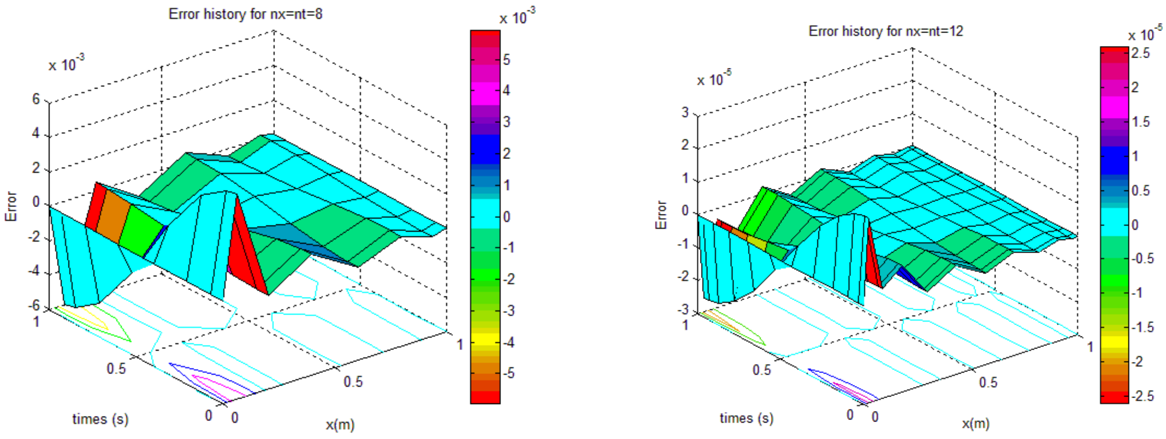
Fig. 1. Comparison of numerical data with experimental drying data taken from Kaya *et al*. (2007)



شکل ۲– مقایسه داده‌های به‌دست آمده توسط روش عددی شبه‌طیفی با داده‌های آزمایشگاهی زارعین و همکاران (۲۰۱۳)

Fig. 2. Comparison of numerical data with experimental drying data taken from Zarein *et al.* (2013)

جهت تأیید بیشتر روش عددی ارائه شده، یک مثال عددی دارای جواب دقیق توسط روش شبه‌طیفی حل گردیده و مقدار خطا در نقاط مختلف x, t به‌ازای $n_x = n_t = 8$ و $n_x = n_t = 12$ (n_x و n_t معرف تعداد گره‌های مکانی و زمانی‌اند) به‌صورت منحنی رفتار خطا نشان داده شده است (شکل ۳). همانطور که مشاهده می‌شود مقدار خطا خیلی پایین و در حدود $۱۰^{-۳}$ و $۱۰^{-۵}$ می‌باشد که نشان‌دهنده دقت بالای روش عددی مورد بررسی می‌باشد.

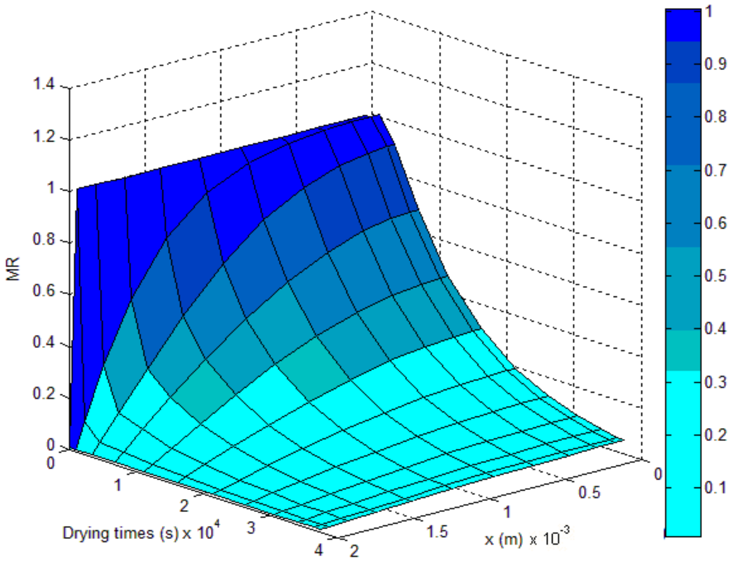


شکل ۳– رفتار خطا به‌ازای $n_x = n_t = 12$ (شکل راست) و $n_x = n_t = 8$ (شکل چپ) برای نقاط معلوم x, t

Fig.3. Error histories for $n_x = n_t = 12$ (Right) and $n_x = n_t = 8$ (Left)

از مزایای مدل‌سازی فرآیند انتقال جرم، پیش‌بینی تغییرات رطوبت در نمونه و فواصل مکانی متفاوت از مرکز آن طی زمان خشک کردن می‌باشد چیزی که با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی معمول قابل اندازه‌گیری نیست و نیازمند تجهیزات و ابزارهای مخصوص می‌باشد (Aregawi *et al.*, 2013). شکل ۴ تغییرات محتوای رطوبت در طی زمان خشک کردن و فواصل مکانی متفاوت از مرکز سیب را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود فرآیند انتقال رطوبت از مرکز نمونه با محتوای رطوبت بالا به سطح با محتوای رطوبت پایین صورت می‌گیرد که مطابق با قانون نفوذ مولکولی فیک می‌باشد. گرادیان شدید تغییرات رطوبت از مرکز نمونه به سطح در زمان‌های ابتدایی خشک کردن نشان‌دهنده سرعت بالای خشک کردن در ابتدای دوره خشک کردن می‌باشد. همچنین گرادیان پایین رطوبت در نمونه نشان‌دهنده کاهش سرعت خشک کردن می‌باشد.

مقادیر عدد بایوت جرمی برای نتایج آزمایشی گزارش شده توسط Zarein و همکاران (۲۰۱۳)، $۱۴/۴۰۷۱۶ \times ۱۰^{۵}$ می‌باشد. عدد جرمی بایوت بزرگتر از ۱۰۰، نشان می‌دهد که مقاومت خارجی به انتقال جرم ناچیز است و در نتیجه نفوذ موثر رطوبت تحت تاثیر شرایط خشک کردن خارجی قرار نمی‌گیرد (Srikiatden and Roberts, 2008).



شکل ٤– توزیع رطوبت درون برش‌های سیب در طی فرآیند خشک کردن

Fig. 4. Moisture distribution inside the apple slice during drying process

همچنین در این مطالعه، زمـان محاسـباتی یـا مـدت زمـان حـل مدل‌های مربوط به فرآیند انتقـال جـرم توسـط روش شـبه‌طیفـی در نرم‌افزار متلب در حدود ۳ ثانیه می‌باشد که بیانگر سرعت بالا و کارآمد بودن روش عددی شبه طیفی در حل معادله انتقـال جـرم و معـادلات مشابه می باشد.

نتیجه‌گیری

در این مطالعه معادلات انتقال جرم مربوط به فرآیند خشک کردن سیب در یک بعد و با استفاده ازروش عددی شبه‌طیفـی حـل گردیـد. جهت ارزیابی روش شبه‌طیفی، نتایج حاصل از حـل عـددی مـدل بـا نتایج آزمایشگاهی گزارش شده توسط سایر محققین مورد مقایسه قرار گرفت. جهت تأیید بیشتر دقت روش شبه‌طیفـی، یـک مثـال عـددی دارای جواب دقیق با استفاده از روش عددی مورد نظر حل گردیـده و رفتار خطا بررسی شد. نتایج به‌دست آمده در این پژوهش نشان داد که روش عددی شبه‌طیفی قادر است بـا دقـت بـالا و زمـان محاسـباتی پایین، فرآیند انتقال جرم را طی خشک کردن به‌خوبی پیش‌بینی نماید.

References

1. Tavakoli pour, H. 2002. Drying foods, Principles and Methods. Aegee publisher, Tehran.
2. ASHRAE. 2009. ASHRAE Handbook-Fundamentals. American Society of Heating, Refrigeration and Air-Conditioning Engineers Inc., Atlanta.
3. Aregawi, W., T. Defraeye, S. Saneinejad, P. Vontobel, E. Lehmann, J. Carmeliet, P. Verboven, D. Derome, and B. M. Nicolai. 2013. Understanding forced convective drying of apple tissue: Combining neutron radiography and numerical modeling. Innovative Food Science and Emerging Technologies 24: 97-105.
4. Ateeque, M., R. K. Mishra, V. P. Chandra Mohan, and P. Talukdar. 2014. Numerical modeling of convective drying of food with spatially dependent transfer coefficient in a turbulent flow field. International Journal of Thermal Sciences 78: 145-157.
5. Bhrawy, A. H., L. M. Assas, E. Tohidi, and M. A. Alghamdi. 2013. A Legendre-Gauss collocation method for neutral functional-differential equations with proportional delays, Advances in Difference Equations 63: 1-16.
6. Aversa, M., S. Curcio, V. Calabro, and G. Iorio. 2007. An analysis of the transport phenomena occurring during food drying process. Journal of Food Engineering 78 (3): 922-932.
7. Bruce, D. M., and S. A. Giner. 1993. Mathematical modeling of grain drying in counter-flow beds: investigation of crossover of air and grain temperatures, Journal of Agriculture Engineering. 55: 143-161.
8. Canuto, C., M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. 1988. Spectral methods in fluid dynamics. Springer, New York.
9. Costa, B. 2004. Spectral Methods for Partial Differential Equations. A Mathematical Journal 6 (4): 1-32.
10. Crank, J. 1975.The Arithmetics of Diffusion, second ed. Oxford University Press, Oxford, UK.
11. Doymaz, I. 2007. Air drying characteristics of tomatoes. Journal of Agriculture Engineering 78: 1291-1297.
12. Graham, N., M. Quandt, and H. Weigel. 2009. Spectral Methods in Quantum Field Theory, Springer-Verlag, Berlin.
13. Hussain, M. M., and I. Dincer. 2003. Numerical simulation of two-dimensional heat and moisture transfer during drying of a rectangular object. Numerical Heat Transfer, Part A: Appl. 43 (8): 867-878.
14. Janjai, S., N. Lamlert, P. Intawee, B. Mahayothee, M. Haewsungcharern, B. K. Bala, and J. Muller. 2008. Finite element simulation of drying of mango. Biosystems Engineering 99 (4): 523-531.
15. Kaya, K., O. Aydın, and C. Demirtas. 2007. Drying Kinetics of Red Delicious Apple. Biosystems Engineering 96 (4): 517-524.
16. Kuo, D. C., J. C. Morales, and K. S. Ball. 1999. Combined natural convection and volumetric radiation in a horizontal annulus: spectral and finite volume predictions. ASME Transaction. Journal of Heat Transfer 121 (3): 610-615.
17. Mujumdar, A. S. 2006. Book Review: Handbook of Industrial Drying, third ed. CRC Press.
18. Lemus-Mondaca, R. A., C. E. Zambra, A. Vega-Galvez, and N. O. Moraga. 2013. Coupled 3D heat and mass transfer model for numerical analysis of drying process in papaya slices. Journal of Food

Engineering 116 (1): 109-117.
19. Li, B. W., Y. S. Sun, and D. W. Zhang. 2009. Chebyshev collocation spectral methods for coupled radiation and conduction in a concentric spherical participating medium. ASME Transaction, Journal of Heat Transfer 131 (6).
20. Paitil, N. D. 1988. Evaluation of diffusion equation for simulating moisture movement within an individual grain kernel. Journal of Drying Technology 6 (1): 21-42.
21. Sabarez, H. T. 2014. Mathematical Modeling of the Coupled Transport Phenomena and Color Development: Finish Drying of Trellis-Dried Sultanas. Journal of Drying Technology 32: 578-589.
22. Sadrnia, H., H. Monfared, and M. Khojastehpour. 2015. Comparison of two methods of purple top turnip drying based on energy consumption and quality parameters. Journal of Agricultural Machinery 5 (1):143-153. (In Farsi).
23. Seyedabadi, E., M. Khojastehpour, and M. H. Abbaspour-Fard. 2017. Convective Drying Simulation of Banana Slabs Considering Non-Isotropic Shrinkage Using FEM with Arbitrary Lagrangian- Eulerian Method. International Journal of Food Properties. DOI: 10.1080/10942912.2017.1288134.
24. Shan, X. W., D. Montgomery, and H. D. Chen.1991. Nonlinear magneto hydrodynamics by Galerkin-method computation, Physical Review A. 44 (10): 6800-6818.
25. Srikiatden, J., and J. S. Roberts. 2008. Predicting moisture profiles in potato and carrot during convective hot air drying using isothermally measured effective diffusivity. Journal of Food Engineering. 84: 516-525.
26. Sun, Y., M. Jing, and B. W. Li. 2012. Chebyshev collocation spectral method for three dimensional transient coupled radiative conductive heat transfer. ASME Transaction. Journal of Heat Transfer 134.
27. Tohidi, E., and O. R. N. Samadi. 2013. Optimal control of nonlinear Volterra integral equations via Legendre polynomials, IMA Journal of Mathematical Control and Information 30: 67-83.
28. Tohidi, E., and A. Kilicman. 2014. An Efficient spectral approximation for solving several types of parabolic PDEs with nonlocal boundary conditions. Mathematical Problems in Engineering.
29. Tohidi, E. 2015. Application of chebyshev collocation method for solving two classes of non-classical parabolic PDEs. Ain Shams Engineering Journal 6: 373-379.
30. Tohidi, E., and Saberi Nik, H. 2015. A Bessel collocation method for solving fractional optimal control problems, Applied Mathematical Modeling 39: 455-465.
31. Trefethen LN. Spectral methods in MATLAB. Philadelphia: SIAM; 2000.
32. Tzempelikos, D. A., D. Mitrakos, A. P. Vouros, A. V. Bardakas, A. E. Filios, and D. P. Margaris. 2015. Numerical modeling of heat and mass transfer during convective drying of cylindrical quince slices. Journal of Food Engineering 156: 10-21.
33. Villa-Corrales, L., J. J. Flores-Prieto, J. P. Xaman-Villasenor, and E. Garcia-Hernandez. 2010. Numerical and experimental analysis of heat and moisture transfer during drying of Ataulfo mango. Journal of Food Engineering 98 (2): 198-206.
34. Zare, D., S. Minaei, M. Mohamad Zadeh, and M. H. Khoshtaghaza. 2006. Computer simulation of rough rice drying in a batch dryer. Energy Conversion and Management 47: 3241-3254.
35. Zarein, M., S. H. Samadi, and B. Ghobadian. 2013. Kinetic Drying and Mathematical Modeling of Apple Slices on Dehydration Process. Journal of Food Processing and Technology.
36. Zhou, R. R., and B.W. Li. 2017, Chebyshev collocation spectral method for one-dimensional radiative heat transfer in linearly anisotropic-scattering cylindrical medium. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 189: 206-220.

Journal of Agricultural Machinery
Vol. 9, No. 1, Spring - Summer 2019, p. 113-122

نشریه ماشین‌های کشاورزی
جلد ۹، شماره ۱، نیمسال اول ۱۳۹۸، ص ۱۲۲-۱۱۳

Numerical Solution of Mass Transfer Process during Drying of Apple Slices Using Pseudospectral Method

A. Pasban[1]- M. Mohebbi[2*]- H. Sadrnia[3]- S. A. Shahidi[4]
Received: 04-04-2017
Accepted: 08-08-2017

Introduction

Convective air drying is one of the oldest and most popular drying methods. Designing and controlling the convective air drying needs the mathematical description of the moisture transfer during the drying process, known as drying kinetics. Fick's second law of diffusion can be used for modelling the moisture distribution inside the moist object during drying process.

Mathematical modeling of drying process is a very important tool, as it contributes to understand better moisture distributions inside the product which helps designing, improving and controlling drying operation in the food industry.

Implementation of the partial differential equations subject to the correspondent initial and boundary conditions is one of the main methods of mathematical modeling to describe the physical phenomena such as moisture transfer during drying. In the recent decades, considerable number of research works have been devoted to numerical solution of mass transfer phenomena during convective drying of food products by using the common numerical solution such as FDMs, FEMs and FVMs.

The spectral collocation (pseudospectral) methods is a powerful tool for the numerical solutions of smooth PDEs like mass transfer equations. Pseudospectral methods are able to achieve the high precision with using a small number of discretization points compared to FDMs and FEMs and with low computational time and computer memory.

The objective of present research is to simulate the mass transfer phenomena in one dimension during convective drying of apple slices. The validation of the presented numerical model was done by comparing experimental drying data taken from Kaya *et al.* (2007) and Zarein *et al.* (2013). For more confirming the numerical approach, a numerical example with the exact solution is provided and the related errors were evaluated.

Materials and Methods

Estimation of mass transfer coefficients

The convective mass transfer coefficient in the surface of the apple slice was obtained according to the relationship presented by Paitil (1988) and Janjai et al. (2008).

$$h_m = {D_{air}}/{\mathrm{L}}\ (2 + 0/522\ ({\rho_{air} uL}/{\mu_{air}})^{0.5} ({\mu_{air}}/{\rho_{air} D_{air}})^{0.33}) \quad (1)$$

Estimation of effective moisture diffusivity coefficient

Fick's second law of diffusion was applied to obtain the effective moisture diffusivity coefficient of the apple slices. The analytical solution of this equation can be written as follows (Crank, 1975):

$$MR = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\exp\left(-\frac{-(2n+1)^2\,\pi^2 Dt}{4l^2}\right) \quad (2)$$

In this study, we consider the Pseudospectral methods for solving 1D mass transfer equation. In order to develop the model, the following common assumptions are considered: negligible heat changes during drying process, moisture is transferred inside the slices by diffusion, one-dimensional mass transfer in apple slices, non-shrinkage and non-deformation of the slice.

1- PhD Graduated, Department of Food Science and Technology, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
2- Professor, Department of Food Science and Technology, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
3- Associate Professor, Department of Biosystems Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
4- Associate Professor, Department of Food Science and Technology, Ayatollah Amoli Branch, Islamic Azad University, Amol, Iran
(*- Corresponding Author Email: m-mohebbi@um.ac.ir)

Results and Discussion

In the field of numerical analysis, the main advantage of pseudospectral methods compared to others such as FDMs and FEMs are exponential convergence and sufficient accuracy (Sun *et al.*, 2012). The values of parameters and coefficients of mathematical model are summarized in Table 1. The comparisons between the predicted average moisture content and the experimental data are shown in Fig. 1 & 2. It can be seen, the numerical results are in good agreement with the experimental data. The values of the correlation coefficient and the root mean square error from comparison of numerical result with experimental data taken from Zarein *et al*. (2013) and Kaya *et al.* (2007) were 0.9996, 0.0729 and 0.997, 0.1561 respectively. Moreover, the running time for solving 1D mass transfer equations was about 3 seconds. This result is the evident that the presented model is successful for predicting the moisture content history during drying process.

Moreover, by using the considered numerical method the approximate solutions of defined numerical example for different discretizing points was evaluated and the associated error history are shown in Figure 3. It can be seen that the values of errors are very low and about 10^{-3} and 10^{-5}, that confirms the high accuracy, robustness and efficiency of the suggested numerical approach.

Conclusions

Spectral collocation (pseudospectral) method is presented to solve mass transfer equation in one dimensional in during convective drying process approximately. The model was validated by the reported experimental data from convective drying of apple slices. Also, a numerical example, which had an exact solution in a closed form, was provided to illustrate the high accuracy of the proposed method. The results of statistical computations (r and $RMSE$) and numerical example showed the efficiency, applicability and robustness of the presented approach.

Keywords: Apple drying, Modeling, Numerical solution, Pseudospectral method